ACTUALI[illegible]

XXXVIII

EXPOSÉS DE PHYSIQUE THÉORIQUE

Publiés sous la direction de

M. LOUIS DE BROGLIE

Professeur à la Sorbonne
Lauréat du Prix Nobel

V

MÉCANIQUE QUANTIQUE ET CAUSALITÉ

D'après M. FERMI

PAR

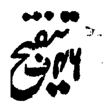
André GEORGE

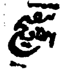
avec remarques de M. LOUIS DE BROGLIE

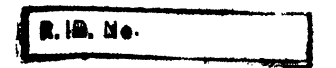


PARIS
HERMANN ET Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1932






R. ID. No.



MÉCANIQUE QUANTIQUE ET CAUSALITÉ

d'après M. FERMI



Les pages qui suivent, en cela conformes à l'un des buts de cette collection, offrent une analyse détaillée, avec développements et commentaires, du mémoire de M. Enrico Fermi paru au *Nuovo Cimento*, l'organe de la Société italienne de Physique, en décembre 1930 (*nuova serie*, VII, 10, p. 361-366). Avec sa clarté coutumière, le célèbre physicien de Rome y cherche à préciser jusqu'à quel point l'on peut, dans la Mécanique nouvelle, parler de causalité et en quel sens doit s'entendre l'affirmation courante que cette Mécanique ne conduit pas à une détermination des événements futurs.

L'article présente un triple intérêt : il complète les vues de Heisenberg et Bohr sur une des questions les plus actuelles de la Physique, il illustre la théorie des intégrales premières en Mécanique ondulatoire, il apporte enfin sa contribution au problème philosophique si débattu de la causalité et de la notion de causalité aujourd'hui permise par la Physique[1].

---

1. Selon l'usage courant des physiciens, le terme *causalité* n'est pris ici qu'au sens restreint de *détermination des événements futurs*. Il n'est donc pas question de la causalité meyersonienne : la détermination des événements futurs, M. Émile Meyerson l'appelle *légalité* et l'oppose, au contraire, à sa conception particulière de la causalité.

I

GÉNÉRALITÉS SUR L'ÉTAT D'UN SYSTÈME ET SA DÉTERMINATION

Considérons, pour plus de facilité, le cas très simple d'un point mobile le long d'une droite. Le raisonnement s'étendrait aisément à des systèmes plus compliqués.

1. *Détermination de l'état du système en Mécanique classique.* — Dans l'ancienne Mécanique, déterminer l'état d'un système c'est préciser simultanément ses conditions spatio-temporelles et ses conditions dynamiques. Au cas du mouvement d'un point le long d'une droite, on spécifiera pour l'instant $t = 0$ par exemple la position du point et sa vitesse, ou, ce qui revient au même, sa quantité de mouvement. Autrement dit, il suffit pour individualiser l'état d'avoir, à $t = 0$, l'abscisse x du mobile et sa quantité de mouvement

$$p = m\dot{x} = mv.$$

Supposons connue l'énergie potentielle $U(x)$ de la force qui agit sur le point. La connaissance de x et de p à l'instant $t = 0$ détermine alors de façon univoque les valeurs de ces deux grandeurs pour le passé comme pour l'avenir.

Voilà le sens du principe de causalité dans la Mécanique traditionnelle. Sa validité en ce domaine classique signifie que la détermination de l'état d'un système à un instant précis suffit à obtenir la détermination de l'état du système à un moment quelconque, passé ou futur.

Naturellement il s'agit d'un système qui, par hypothèse, ne subit aucune perturbation du fait d'autres systèmes plus ou moins connus. Et c'est du principe de causalité dans ce sens précis que nous parlerons toujours ici.

D'ailleurs, dans le cas classique, il n'est pas nécessaire, pour déterminer l'état, de mesurer directement les valeurs de x et de p à l'instant $t = 0$. On pourra tout aussi bien mesurer par exemple les valeurs de deux fonctions indépendantes $f(x, p)$ et $g(x, p)$. Il

suffit en effet de remonter des valeurs de ces fonctions aux valeurs de x et de p.

Telle est l'expression bien connue du déterminisme classique, conception qui résulte surtout de la Mécanique céleste et de ses succès. L'idée a trouvé sa forme la plus générale et la plus parfaite dans la phrase célèbre de Laplace, dès les premières pages de l'*Essai philosophique* qu'il joignit à sa *Théorie analytique des probabilités*.

2. — Que deviennent ces considérations en Mécanique quantique? Pour répondre à la question, voyons d'abord ce qu'il faut connaître d'un système pour pouvoir dire qu'on en a déterminé l'état.

Déterminer l'état du système à un certain instant, c'est obtenir le maximum de renseignements possible sur la situation du système dans cet instant. Or, ce maximum n'est pas le même dans l'ancienne Mécanique et dans la nouvelle. Les relations d'incertitude de Heisenberg prouvent qu'on ne peut faire de mesure, tout ensemble rigoureuse et simultanée, de x et de p. Dans le cas général on a au moins la relation connue entre les deux erreurs Δx et Δp :

$$\Delta x.\ \Delta p \geqslant h.$$

Dans le cas limite, si on fait une mesure exacte de x, la quantité de mouvement p reste fatalement indéterminée, et réciproquement.

Revenons à notre exemple. Pour notre système à un seul degré de liberté, nous pouvons bien mesurer avec une précision théoriquement absolue l'une des grandeurs physiques p ou x, ou une fonction quelconque $g(x, p)$. Mais nous ne pouvons plus mesurer parfaitement, à un même instant, que l'une *ou* l'autre de ces grandeurs, jamais l'une *et* l'autre.

Par conséquent l'on peut déterminer l'état d'un système par des modes *essentiellement différents*, mais qui dépendent du choix particulier de la fonction $g(x, p)$ à mesurer.

En Mécanique quantique, c'est là le maximum de détermination. Dans le cas classique au contraire, où l'on admet la possibilité de mesurer parfaitement quoique dans le même instant deux fonctions indépendantes f et g de x et de p, l'on peut toujours déterminer, en dernière analyse, ces deux variables.

II

MESURE D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

1. — Dans le formalisme de la Mécanique quantique, la mesure d'une grandeur physique se traduit par la recherche, pour l'état considéré, de la valeur propre de l'opérateur correspondant à la grandeur. C'est le *Principe de quantification,* que Dirac par exemple exprime sous cette forme : *Les valeurs propres d'une observable sont les résultats possibles d'une mesure effectuée sur cette observable*[1].

Mesurons une grandeur mécanique $g(x, p)$. Nous lui trouvons la valeur g' et nous en déduisons facilement la fonction Ψ correspondante[2]. On l'obtient en effet, comme on sait, pour solution de l'équation (équation des valeurs propres)[3] :

$$g(x, p)\, \Psi(x) = g'\Psi(x) \tag{1}$$

où, dans le premier membre, $g(x, p)$ doit s'entendre comme l'opérateur obtenu en substituant à la variable p dans $g(x, p)$, l'opération quantité de mouvement $\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}$.

Si la grandeur $g(x, p)$ n'est autre que l'énergie du système, l'équation se réduit à l'équation fondamentale de Schrödinger :

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,[E - V(x, y, z)]\,\Psi = 0.$$

1. P. A. M. Dirac, *Les Principes de la Mécanique quantique* (traduction Proca et Ullmo, Presses Universitaires, 1931), p. 40.

2. Comme certains auteurs étrangers, M. Fermi l'appelle *scalaire de champ* (*scalare di campo*; cf. aussi *Introduzione alla Fisica atomica,* 1928, p. 305 et s.). L'expression paraît correspondre à l'ancienne théorie de la lumière où, dans le cas simple de la variable lumineuse, la lumière était représentée par une fonction d'onde scalaire, et dans le cas de la polarisation par une fonction d'onde vectorielle. C'est plutôt sous cette forme que l'on considère aujourd'hui la grandeur vibrante : nous l'appelons simplement ici, selon l'usage courant, fonction Ψ.

3. Par exemple, P. A. M. Dirac, *Proceedings Roy. Soc.*, 113, 621, 1927.

2. — Mesurons maintenant une autre grandeur physique $G(x, p)$ et non plus $g(x, p)$. Nous trouvons un Ψ différent. La fonction d'onde qui représente l'état du système dépend donc non seulement du système lui-même, mais du mode particulier que nous avons choisi pour en préciser l'état.

Dans la Mécanique quantique, l'état d'un système à un instant donné peut donc être défini de deux manières différentes :

en mesurant la valeur d'une grandeur physique $g(x, p)$ à cet instant;

en se donnant à cet instant une fonction généralement complexe de x, qu'on peut mettre entre autres sous la forme :

$$\Psi(x) = \rho(x)\, e^{i\theta(x)}$$

et qui représente la fonction d'onde au même instant.

3. — Il est facile de voir que les deux méthodes sont équivalentes.

Par l'équation (1) nous savions que, connaissant la valeur g' prise par la grandeur $g(x, p)$, l'on pouvait déterminer au même instant la fonction $\Psi(x)$ à une constante multiplicative près.

On peut montrer inversement que, étant donnée une fonction complexe quelconque :

$$\Psi(x) = \rho e^{i\theta}$$

fonction d'onde à un certain instant, il existe toujours un opérateur réel (nous précisons plus loin le langage de M. Fermi dans ce raisonnement) $g(x, p)$ tel que :

$$g(x, p)\ \Psi(x) = 0. \qquad (2)$$

On peut dire en somme que si l'on a la fonction d'onde $\Psi(x)$, la grandeur $g(x, p)$ a la valeur zéro.

Il faut naturellement que la grandeur ait un sens physique. La fonction $g(x, p)$ doit donc être réelle. Mettons ce caractère en évidence par l'équation :

$$g(x, p) = \left(p - \frac{h}{2\pi}\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2} \qquad (3)$$

où la fonction g ainsi définie est réelle.

On vérifie, en partant de là, que :

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right) \rho e^{i\theta} = 0$$

c'est-à-dire que la grandeur g satisfait à l'équation (2). Elle n'est d'ailleurs pas la seule : les grandeurs réelles g^2, g^3,... y satisfont pareillement.

Traduisons les mêmes idées dans un langage plus conforme à la Mécanique ondulatoire en disant que l'opérateur $g(x, p)$ est *hermitique*, comme tous les opérateurs correspondant à des grandeurs physiques en Mécanique ondulatoire. Les valeurs possibles pour la mesure de telles grandeurs, — ce sont les valeurs propres de leurs opérateurs, — doivent être nécessairement des valeurs réelles.

En résumé, quand on fait une mesure sur une grandeur mécanique x ou p, ou sur une fonction donnée de x et de p, on peut toujours en déduire Ψ, la fonction d'onde, au même moment.

III

LE PROBLÈME DE LA CAUSALITÉ DANS LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Le problème, principal objet du mémoire, est le suivant : quels éléments de l'état du système pour un instant futur est-il possible de déterminer par des expériences faites à l'instant actuel?

On va montrer que, étant donnée une grandeur physique quelconque $G(x, p)$, il est toujours possible de connaître quelle valeur elle aura à un moment quelconque $t_1 > 0$, grâce à une expérience convenable exécutée au temps $t = 0$.

1. — Nous voulons pouvoir annoncer avec certitude la valeur G_i d'une mesure de la grandeur $G(x, p)$ faite à l'instant t_1. Nous savons alors par l'équation (1) que le Ψ du système à cet instant t_1 doit satisfaire avant la mesure à la relation :

$$G\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x, t_1) = G_i\Psi(x, t_1). \tag{5}$$

De Ψ au temps t_1, nous pouvons déduire Ψ à un instant antérieur quelconque. Appelons $H(x, p)$ l'énergie du système. La fonction $H(x, p)$ satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$H\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x, t) = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{6}$$

Comme elle est du premier ordre par rapport au temps, elle permet de déterminer entièrement la fonction Ψ, dès lors qu'on connaît ses valeurs à l'instant t_1. L'équation (6) nous permet donc d'avoir $\Psi(x, 0)$ pour $t = 0$. Et la valeur G_i, que prend par hypothèse la grandeur $G(x, p)$ au temps t_1, figurera bien entendu comme paramètre dans la fonction $\Psi(x, 0)$ ainsi précisée. Fai-

sons-le ressortir en donnant explicitement à $\Psi^r\ (x,\ 0)$ la forme $\Psi^r(x,\ 0,\ G_i)$.

Par l'équation (3) nous avons montré qu'on peut toujours déterminer un opérateur $g\ (x,\ p)$, hermitique, donc correspondant à une grandeur réelle, et tel que :

$$g\left(x,\ \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi^r(x,\ 0,\ G_i) = 0. \tag{7}$$

Autrement dit, si en mesurant la grandeur $g\,(x,\ p)$ on trouve la valeur propre zéro, la fonction propre est :

$$\Psi^r\ (x,\ 0,\ G_i).$$

Donc, si une mesure certaine faite au temps zéro nous a donné : $g\,(x, p) = 0$, nous pouvons conclure qu'en mesurant la grandeur $G\,(x,\ p)$ au temps t_1, on trouvera pour elle la valeur G_i.

Mais comme dans $\Psi^r\ (x,\ 0,\ G_i)$ intervient le paramètre G_i, G_i sera également contenu dans $g\,(x,\ p)$, ce que nous expliciterons sous la forme $g\,(x,\ p,\ G_i)$. La condition nécessaire et suffisante pour que au temps t_1 on trouve $G\,(x,\ p) = G_i$, c'est donc qu'au temps $t = 0$, on trouve $g\,(x,\ p,\ G_i) = 0$. Ce qui donne pour G_i une valeur

$$G_i = A(x,\ p).$$

Nous arrivons donc au résultat suivant pour le problème proposé : la valeur G_i qu'aura la grandeur $G\,(x,\ p)$ au temps t_1 s'obtient en mesurant au temps zéro la grandeur $A\,(x,\ p)$.

2. — Prenons un exemple très simple pour illustrer la méthode.

Considérons un point mobile sur une droite, en l'absence de toute force perturbatrice. Quelle grandeur doit-on mesurer au temps zéro, pour déterminer la valeur de l'abscisse du point au temps t_1?

Soit x_1 cette abscisse. La fonction de Schrödinger à l'instant t_1 est alors :

$$\Psi^r\ (x,\ t_1) = \delta(x - x_1) \tag{8}$$

où δ est le symbole de Dirac, c'est-à-dire la fonction (fonction *impropre*) qui généralise la matrice unité pour les spectres continus de valeurs propres[1].

1. Cf. P. A. M. Dirac, *Les Principes de la Mécanique Quantique*, chap. III, § 22; et Louis de Broglie, *La Théorie de la quantification dans la nouvelle Mécanique*, chap. XI, § 5.

La fonction δ est telle qu'on ait, d'une part :

$$\delta(x) = \delta(-x) \qquad \text{(fonction paire de } x\text{)}$$

et d'autre part :

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x - x_1)\,dx = \left|\begin{array}{l} 0 \text{ pour } x_1 \text{ non compris dans l'intervalle } a \longrightarrow b. \\ f(x_1) \text{ pour } x_1 \text{ compris dans l'intervalle } a \longrightarrow b. \end{array}\right.$$

Notre mobile n'étant soumis à nulle force extérieure, nous sommes dans le cas simple où son Hamiltonien se réduit à :

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

et l'équation (6) de Schrödinger devient :

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi m i}{h}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Mais il nous faut une solution qui ramène à l'équation (8) pour $t = t_1$. Une telle solution sera, à une constante multiplicative près, de la forme d'une expression de Gauss[1].

$$\Psi(x, t) = \lim_{\alpha = 0} \frac{1}{\sqrt{t_1 - t}}\, e^{-\frac{(x - x_1)^2}{t_1 - t}\left[\alpha + \frac{\pi i m}{h}\right]}.$$

D'où l'on tire, encore à une constante multiplicative près :

$$\Psi(x, 0) = e^{-\frac{\pi i m}{h t_1}(x - x_1)^2}.$$

Nous pouvons désormais déterminer $g(x, p, x_1)$ en posant dans l'équation (3) :

$$\theta = -\frac{\pi m}{h t_1}(x - x_1)^2 \text{ et } \rho = 1$$

ce qui donne :

$$g(x, p, x_1) = \left[p + \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi m}{h t_1}(x - x_1)\right]^2$$
$$= \left[p + \frac{m}{t_1}(x - x_1)\right]^2.$$

---

1. Cf. E.-H. Kennard, *Zeits. für Physik*, 44, 326 (1927).

Et si l'on trouve zéro pour valeur de g en mesurant cette grandeur au temps zéro, l'on obtient :

$$(10) \qquad \left[p + \frac{m}{t_1}(x - x_1)\right]^2 = 0.$$

Au temps t_1, l'abscisse sera alors x_1. En résolvant par rapport à x_1, il vient :

$$(11) \qquad x_1 = \frac{p}{m} t_1 + x.$$

La conclusion est facile : pour avoir l'abscisse x_1 du point au temps t_1, il suffit de mesurer au temps zéro la grandeur

$$\frac{p}{m} t_1 + x.$$

L'exemple très simple que nous avions choisi ne permet pas de distinguer à cet égard l'ancienne et la nouvelle Mécanique. En Mécanique classique en effet, le résultat est aussi banal qu'évident puisque $\frac{p}{m}$ est précisément la vitesse du mobile et que cette vitesse est constante. Nous avons dans notre équation (11) l'équation classique du mouvement : p est la quantité de mouvement constante du mobile, x son abscisse à l'instant initial, et en l'absence de force, ce mouvement est uniforme.

Mais dans des cas plus complexes, le résultat différencierait essentiellement la Mécanique quantique de la Mécanique classique.

3. — Cet exemple simple offre une élégante illustration de la théorie des intégrales premières dans les deux mécaniques[1].

A) En Mécanique classique[2], l'intégrale première d'un problème donné est une fonction des coordonnées, des moments et du temps s'il y a lieu, qui demeure constante dans les équations du mouvement, à travers l'évolution du système.

1. V. Louis de Broglie, *La Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique*, ch. xv-xvii, particulièrement ch. xvii, § 3, où l'exemple d'une intégrale première dépendant du temps (et par conséquent affranchie d'hypothèses restrictives concernant les opérateurs) est justement celui qui est choisi par Fermi. Il suffit de changer i en $-i$, ce qui importe peu, pour comparer les formules données ici à celles de l'ouvrage cité.

2. V. par exemple : P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 413 et suiv.

En Mécanique ondulatoire, la notion est plus compliquée parce que les valeurs des coordonnées et des moments n'ont plus qu'un caractère de probabilité. D'une part, la notion se traduit dans le formalisme particulier de la nouvelle Mécanique, et d'autre part sa signification physique ne peut que refléter l'allure statistique de la nouvelle Physique. Dans un problème de Mécanique ondulatoire, où toute grandeur est représentée par un opérateur, les constantes définissant la grandeur intégrale première sont tous les éléments de la matrice qui elle-même correspond à l'opérateur, et qui est exprimée dans un système de base particulier. On démontre que les valeurs possibles de la grandeur intégrale première, et que les probabilités de ces valeurs quelle que soit la forme de la fonction Ψ, sont indépendantes du temps. Autrement dit, la *décomposition spectrale* de la fonction Ψ, par rapport aux fonctions propres de l'opérateur correspondant à la grandeur, est permanente.

B) Dans l'exemple choisi, la quantité de mouvement p et la vitesse v du mobile sont constantes.

En Mécanique classique, l'équation du mouvement

$$(11) \qquad x_1 = \frac{p}{m} t_1 + x$$

nous donne la valeur

$$A = x_1 - \frac{p}{m} t_1$$

pour la grandeur mécanique A. Cette valeur, qui n'est autre que l'abscisse initiale du mobile, reste constante au cours du mouvement. La grandeur mécanique A est donc bien une intégrale première.

En Mécanique ondulatoire[1], l'équation du mouvement devient notre équation de propagation

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

car l'Hamiltonien se réduit à

$$H = \frac{1}{2m} p^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

1. On passe de l'ancienne à la nouvelle Mécanique en remplaçant la quantité de mouvement par l'opérateur $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ (V. L. de BROGLIE, *Remarques sur les intégrales premières de la Mécanique ondulatoire, C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 194, 1932, 693-695).

Ici, considérons la grandeur mécanique A représentée par l'opérateur

$$A = x - \frac{p}{m} t = x. - \frac{ht}{2\pi i m} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left(p = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ et } x. = \text{multiplication par } x\right).$$

L'opérateur A est un *opérateur complet*, c'est-à-dire s'appliquant à toutes les variables, car l'opérateur moment est complet dans le cas particulier, — ici envisagé, — d'un point mobile sur une droite, système à un seul degré de liberté.

Or, l'on démontre en Mécanique ondulatoire[1] que l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h} [AH - HA] = 0$$

c'est-à-dire que A est encore intégrale première.

La grandeur considérée se trouve donc bien être intégrale première dans la nouvelle Mécanique comme dans l'ancienne.

C) L'opérateur $x. - \frac{p}{m} t$ étant intégrale première, l'opérateur $x. - \frac{p}{m} (t - t_1)$ qui en diffère seulement par le choix de l'origine des temps, l'est aussi[2]. Si l'on trouve pour la grandeur correspondante la valeur a à l'instant $t = 0$, elle devra, étant intégrale première, avoir la même valeur a à l'instant $t = t_1$, instant où elle se réduit à la coordonnée x. Pour prévoir la valeur x_1 de l'abscisse au temps t_1, il suffit donc de mesurer la grandeur $x + \frac{p}{m} t_1$ au temps zéro : c'est précisément l'énoncé de Fermi.

1. V. Louis de Broglie, *La Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique*, p. 239.

2. Nous devons ce dévoppement-ci à l'obligeance de M. Louis de Broglie.

IV

CONCLUSIONS

Le bilan causal, si l'on peut dire, de la détermination des grandeurs dans la Mécanique quantique est en résumé le suivant.

1. — A) La mesure exacte d'une grandeur conduit toujours à une valeur déterminée. Tout ce qu'on peut savoir de l'état d'un système à un moment donné, il demeure possible de le prévoir pour un moment ultérieur quelconque, par le moyen d'une expérience appropriée. On ne peut donc dire que l'indétermination augmente au cours du temps.

B)[1] Étant donné un opérateur défini à un instant t_1 comme égal à $A(x, p)$, il existe *toujours* une intégrale première $A(x, p, t, t_1)$ qui se réduit à $A(x, p)$ à l'instant $t = t_1$. (Voir la note de M. Louis de Broglie à l'Académie des Sciences, *C. R.*, t. 194, 1932, p. 695.)

Le cas envisagé par Fermi en est un exemple : $A(x, p) = x$. à l'instant t_1. On a l'intégrale première

$$A(x, p, t, t_1) = x. - \frac{p}{m}(t - t_1)$$

qui se réduit à x. pour $t = t_1$.

Cela étant, supposons qu'on veuille prévoir la valeur qu'aura la grandeur physique correspondant à l'opérateur $A(x, p)$ à un instant $t = t_1$. Soit $A(x, p, t, t_1)$ l'intégrale première qui se réduit à $A(x, p)$ à l'instant $t = t_1$. Si l'on mesure la grandeur correspondant à cette intégrale première à l'instant $t = t_0 < t_1$ et si l'on trouve une valeur a, après cette mesure on aura un *cas pur* pour l'opérateur $A(x, p, t, t_1)$: c'est-à-dire que la fonction Ψ se

1. Ce paragraphe, ainsi que les deux remarques de la page 17 sont de M. Louis de Broglie.

17467

réduira[1] à *une* fonction propre de A à chaque instant, savoir la fonction propre correspondant à la valeur propre a (valeur propre qui est constante en vertu des propriétés des intégrales premières). Il en résulte qu'une mesure de la grandeur $A(x, p)$ à l'instant t_1 donnera *sûrement* la même valeur a (si toutefois une autre mesure n'a pas troublé l'évolution de Ψ entre t_0 et t_1).

L'exemple de Fermi est un cas particulier de ce qui précède. On voit donc qu'en un sens on peut toujours se ramener à un cas pur et à une intégrale première, dans un problème de Mécanique quantique.

2. — En revanche, une série de restrictions caractérisent la nouvelle Mécanique.

A) D'abord les relations de Heisenberg prouvent l'impossibilité de mesurer à la fois et rigoureusement deux grandeurs canoniquement conjuguées. Dans le langage formel de la Mécanique ondulatoire, on dira : deux grandeurs mécaniques ne peuvent être mesurées simultanément et avec absolue précision que si leurs opérateurs permutent. Cette condition nécessaire et suffisante ne se trouve plus remplie par exemple pour l'une des coordonnées et son moment conjugué : on ne peut donc mesurer en même temps et exactement ces deux grandeurs.

B) Pour une grandeur déterminée, l'on peut bien au temps zéro, il est vrai, faire une mesure qui permette de connaître quelle valeur prendra cette grandeur à un instant déterminé. Mais si on voulait savoir la valeur d'une autre grandeur, voire de la même à un autre instant, il faudrait faire au temps zéro une mesure différente, généralement incompatible avec la première. En Mécanique classique au contraire, l'on pouvait toujours par des mesures voulues prises sur le système au temps zéro, prévoir la valeur d'une grandeur mécanique quelconque (fonction de x et de p) à un moment quelconque. De plus, la grandeur dans l'ancienne Mécanique pouvait prendre toutes les valeurs possibles. En Mécanique quantique elle ne peut plus en prendre que certaines : les valeurs propres de son opérateur.

---

1. Du moins si la mesure est « répétable » au sens de Landau et Peierls [sur cette restriction, voir la fin du présent exposé, p. 17].

[*Première Remarque.* — La mesure de A (x, p, t, t_1) à une époque t_2 *postérieure* à t_1 ne permet pas d'affirmer que l'on ait eu *avant la mesure* un cas pur pour cet opérateur. Le fait que la mesure à l'instant t_2 ait fourni la valeur a, ne permet donc pas de dire que la grandeur A (x, p) *a eu* à l'instant $t_1 < t_2$ la valeur a.

Deuxième Remarque. — Soient deux opérateurs A (x, p) et B (x, p) considérés à l'instant t_1. S'ils ne commutent pas, les intégrales premières correspondantes A (x, p, t, t_1) et B (x, p, t, t_1) ne commutent pour aucune valeur de t. Il faut bien qu'il en soit ainsi, sans quoi une mesure simultanée de ces intégrales premières à l'instant où elles commuteraient, permettrait de prédire les valeurs de A (x, p) et de B (x, p) à l'instant t_1 où ces grandeurs ne sont pas simultanément mesurables!]

C) Les valeurs auxquelles conduisent les mesures successives des grandeurs mécaniques ne sont plus rattachées entre elles que par des lois de probabilités : par l'évolution de la fonction d'onde Ψ.

3. — On voit donc comment il faut entendre le principe de causalité dans la nouvelle Mécanique. On voit par là même combien la validité de ce principe est restreinte par rapport à son étendue en Mécanique classique.

Encore nous en sommes-nous tenus ici à l'aspect habituel du problème. On sait que d'après MM. Landau et Peierls, développant les récentes idées de Bohr, la validité du principe subirait de nouvelles réductions : une mesure possible peut n'être plus « répétable », l'application à la Mécanique quantique des idées générales de la Relativité conduit à écrire des formules plus restrictives encore que celles de Heisenberg. Or, comme nous l'avons vu, admettre qu'on retrouvera la valeur a pour une grandeur intégrale première, après une mesure qui antérieurement donna cette valeur a, c'est évidemment admettre que la mesure est « répétable ».

« La théorie quantique, rigoureuse et relativiste, — que Landau et Peierls opposent à la théorie actuelle, — donnera bien une probabilité pour le résultat de l'expérience mais cette probabilité

ne pourra pas être considérée comme la probabilité d'une mesure pour un paramètre donné[1]. » Nous ne pouvons que renvoyer à l'exposé de M. Louis de Broglie sur cette question : le nôtre se termine où le sien commence.

1. *Sur une forme plus restrictive des relations d'incertitude, d'après MM. Landau et Peierls*, par Louis de BROGLIE, 1er fascicule des « Exposés de Physique théorique » (Hermann, 1932).



Imprimé en France
TYPOGRAPHIE FIRMIN-DIDOT ET Cie. — MESNIL (EURE). — 1932.